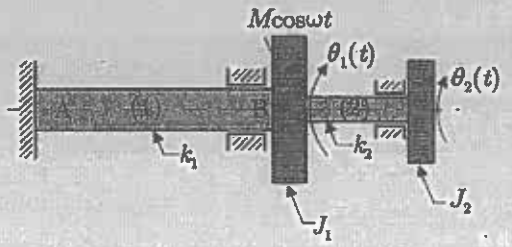
1) (2 val) As equações de movimento de um sistema linear discreto com n graus de liberdade são do tipo $[m]\{\ddot{q}(t)\}+[c]\{\dot{q}(t)\}+[k]\{q(t)\}=\{f(t)\}$

a) (25%) Definir coordenadas generalizadas e coordenadas naturais ou modais.
b) (25%) Definir: i) modo natural de vibração; ii) forma natural de vibração; iii) nodo de vibração.
c) (25%) Comentar a importância dos modos naturais de vibração na análise dinâmica dos sistemas.
d) (25%) Escrever e caracterizar a equação de frequências naturais de um sistema discreto.

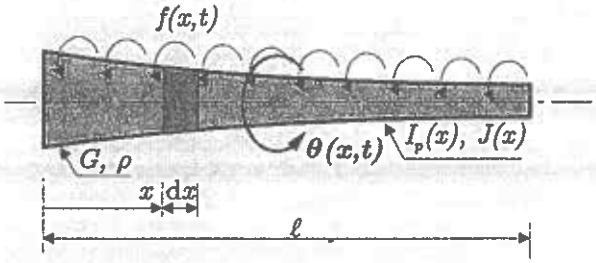
2) (2 val) A figura representa um sistema vibratório ao qual foi acoplado um absorsor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação.



a) (25%) Explicar, sucintamente, a função do absorsor de vibrações;
b) (25%) Estabelecer as equações de movimento do sistema;
c) (25%) Representar graficamente a amplitude $\Theta_2(\omega)$ e a amplitude $\Theta_1(\omega)$ antes e após a montagem do absorsor, indicando claramente eventuais pontos notáveis e a posição (ω) de funcionamento;
d) (25%) Actuando ao nível dos momentos de inércia J_1 e J_2, indicar, justificando, uma solução para afastar as 2 frequências naturais ω_1 e ω_2.

3) (2 val) O comportamento dinâmico de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}=\{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\}=\{\dot{x}\}_0$.

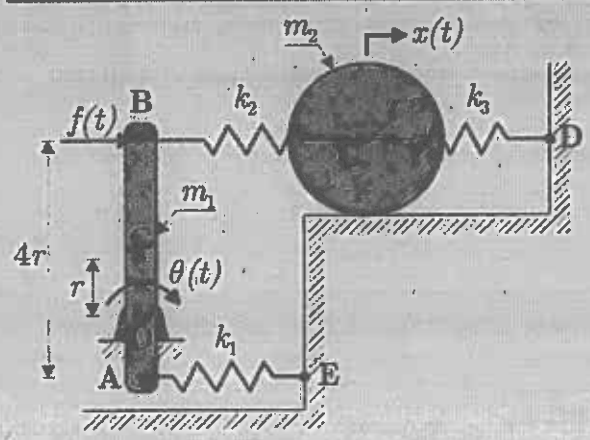
a) (25%) Para uma solicitação harmónica aplicada no grau de liberdade genérico r, $f_r(t)=F\sin\omega t$, caracterizar a resposta estacionária do sistema e representar graficamente a amplitude de resposta $X_r(\omega)$, indicando eventuais pontos notáveis;
b) (25%) Indicar a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal e a(as) vantagem(s) desta técnica na determinação e análise do regime forçado. Justificar a designação "sobreposição modal";
c) (25%) Justificar a utilização de uma base modal truncada na determinação da resposta do sistema. Estabelecer a expressão de condições iniciais de deslocamento na base modal truncada.
d) (25%) Indicar a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh e justificar porque um vector arbitrado $\{v\}$, porventura uma aproximação "grosseira" da forma natural, pode conduzir a uma "boa" estimativa da frequência natural.



4) (2 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção $\theta(x,t)$ provocada por um momento torsor distribuído $f(x,t)$.

a) (25%) Considerando um elemento infinitesimal de comprimento dx, estabelecer e caracterizar a equação diferencial de movimento do veio representado.
b) (25%) Escrever as expressões de ortonormalidade das formas naturais $\Theta_r(x)$, $r=1,\ldots$;
c) (25%) Mostrar, justificando, como determinar a resposta $\theta(x,t)$ à solicitação genérica $f(x,t)$.
d) (25%) Definir velocidades críticas de veios.

FEUP, 07 de Julho de 2010
José Dias Rodrigues



1) (6 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por 2 corpos:

- corpo 1, barra de massa m_1 e de comprimento $4r$ que roda em torno do ponto fixo O, ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez k_1 e ao corpo 2 através da mola linear elástica de rigidez k_2;
- corpo 2, disco de massa m_2 e de raio r que rola sem escorregar sobre uma superfície e que se encontra ligado ao corpo 1 através de uma mola linear elástica de rigidez k_2 e ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez k_3.

As coordenadas generalizadas $x(t)$ e $\theta(t)$ são coordenadas absolutas. Na situação de equilíbrio estático, $x(t) = \theta(t) = 0$ e as molas não estão deformadas. As oscilações angulares podem considerar-se 'pequenas'.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema recorrendo ao formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

$$\underset{M}{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \underset{K}{\begin{bmatrix} 3000 & -4000 \\ -4000 & 15000 \end{bmatrix}} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Determinar a amplitude do deslocamento do centro do disco devido a uma excitação $f(t) = 100\cos(20t)$.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal, com os vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

e) (15%) Determinar o ângulo $\theta(t)$ em função do tempo quando o sistema é sujeito a uma excitação $f(t)$ transiente do tipo meia onda seno:

$$f(t) = \begin{cases} 100\sin\left(\dfrac{\pi}{0.4}t\right) & 0 < t \le 0.4\,\text{s} \\ 0 & t > 0.4\,\text{s} \end{cases}$$

f) (15%) Determinar o valor máximo da resposta $x(t)$ à excitação da alínea anterior.

v.s.f.f.

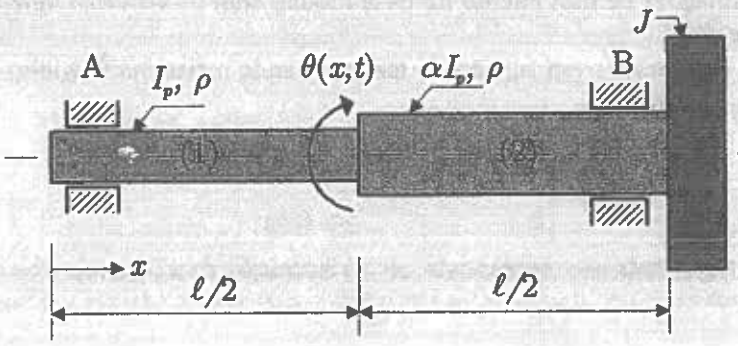
2) (6 val.) Na figura representa-se um veio de dois tramos livre em $x = 0$ e com um volante em $x = \ell$. A secção recta circular do tramo (1), $0 \le x \le \frac{\ell}{2}$, apresenta um momento polar I_p e a secção recta circular do tramo (2), $\frac{\ell}{2} \le x \le \ell$, apresenta um momento polar αI_p. O material do veio possui módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. O momento polar de inércia do volante pode exprimir-se como $J = \beta \rho I_p \ell$.

Considerar as funções $\Theta_1(x) = \delta \cos\frac{\pi}{\ell}x$ e $\Theta_2(x) = \delta \cos\frac{2\pi}{\ell}x$ como eventuais funções de aproximação para a forma natural fundamental de torção.

a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.
b) (20%) Esboçar a representação gráfica das duas funções de aproximação, classificá-las e seleccionar, justificando, a mais adequada para aproximação da forma natural fundamental de torção;
c) (35%) Calcular a estimativa ω_{1R} da frequência natural de vibração de torção utilizando o método de Rayleigh. Exprimir o resultado na forma $\omega_{1R} = g(\delta,\alpha,\beta)\sqrt{\frac{G}{\rho\ell^2}}$ onde $g(\delta,\alpha,\beta)$ representa uma função.

Utilizando a solução analítica exacta da torção para um veio de secção circular constante, $\theta(x,t) = \left(A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\sin\omega t\right)$,

d) (30%) estabelecer, sob a forma de determinante, a equação de frequências naturais de vibração de torção para o veio considerado. NOTA: utilizar coordenadas espaciais x_1 e x_2 para os tramos (1) e (2) respectivamente.



$$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} \qquad \int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a} \qquad \int x \sin ax dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)\cos ax \qquad \int x^2 \cos ax dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax$$

$$\int x \sin^2 ax dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} \qquad \int x \cos^2 ax dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

Feup, 07.07.2010
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

→ O comportamento vibratório de um sistema com n graus de liberdade pode ser descrito pelo modelo espacial $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$.

– Definir modos naturais de vibração?

Os modos naturais de vibração constituem 2 ou mais modos para os quais o movimento harmónico síncrono do sistema é possível. Estes movimentos são caracterizados pelas frequências naturais ω_i com $i=1$ e pelos vectores modais $\{u\}_i$; $i = 1, \ldots, n$.

$$x(t)_i = \{u\}_i \cos(\omega_i t - \phi)$$

– Indicar e escrever uma propriedade relevante dos vectores modais representativos das formas naturais de vibração.

Os vectores modais $\{u\}_i$, soluções do sistema homogéneo associado a cada uma das frequências naturais, representam as formas naturais de vibração do sistema e definem a forma ou configuração espacial assumida pelo sistema durante o movimento síncrono de freq. ω_i.

Os vectores modais apresentam a propriedade de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e rigidez.

$$[\Phi]^T [m] [\Phi] = [I] \quad ; \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega^2].$$

↳ Para vectores modais normalizados para massas modais unit a propriedade da ortogonalidade designa-se por ortonormalidade.

– Referir qual é o interesse da representação do sistema de eqs de movimento na base modal.

O interesse da representação na base modal é que através desta representação é possível transformar as equações de n graus de liberda em equações independentes, ordinárias e desacopladas ou seja transfor em n equações com um grau de liberdade.

- Porque é que a matriz de massa é sempre definida positiva ? A de rigidez é sempre definida positiva? justificar?

$T = \frac{1}{2} m v^2$ → é uma função quadrática das velocidades.

$V = \frac{1}{2} k \cdot x^2$ → é uma função quadrática dos deslocamentos.

A energia cinética não pode ser negativa e apenas é nula quando todas as velocidades forem nulas, logo se isso acontecesse estaríamos perante um problema de estática. Como a energia cinética é uma forma quadrática definida positiva, a matriz de massa é designada por matriz definida positiva.

A energia potencial é uma forma quadrática definida positiva e a matriz [K] é definida positiva, no entanto, existem sistemas para os quais a energia potencial é nula sem que os deslocamentos o sejam. Nesses casos a energia potencial é uma função quadrática semi def. positiva em vez de definida positiva, por consequência a matriz de rigidez diz-se semi-definida positiva.

→ O comportamento vibratório em regime livre ou natural de um sistema contínuo é governado por uma eq. dif. de derivadas parciais cuja solução pode ser determinada pelo método da separação de Variáv

O método da energia de Rayleigh é um método aproximado para estimar a frequência fundamental. Indicar em que princípios se baseia, caracterizar a função de aproximação utilizada e a frequência estimada.

O método baseia-se no princípio de Rayleigh que se pode enunciar da seguinte forma: "Para um sistema conservativo, a frequência de vibração estimada apresenta um valor estacionário na vizinhança de um modo natural". Este valor estacionário é um mínimo na vizinhança do modo fundamental.

A função de aproximação utilizada tem que ser uma função derivável, no mínimo um número de vezes igual a metade da ordem do problema, e tem que verificar no mínimo as condições de fronteira geométricas do prob

frequência estimada é um valor estacionário e é mínimo na vizinhança do modo fundamental de vibração.

$$R(\underline{\Phi}(x)) = \omega_R^2 \geq \omega_1^2$$

→ Sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema eqs. dif - $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\} = \{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\} = \{\dot{x}\}_0$. A resposta pode ser determinada por integração directa das eqs. do movimento ou por análise modal.

- Explicar as propriedades em que assenta a técnica da análise modal e o interesse desta técnica na determinação do regime forçado.

A transformação linear com a matriz modal $[\underline{\Phi}]$, conjuntamente com a propriedade de ortogonalidade dos vectores modal, permite, pois, o desacoplamento simultâneo em termos elásticos e em termos de inércia das eqs do movimento. A projecção das eqs dif. do mov na base modal conduz a equações diferenciais desacopladas ou independentes, sendo cada uma delas idêntica à eq. dif. mov. sistema com 1 grau de liberdade.

- Justificar a utilização da análise modal truncada. Comentar a selecção dos modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada.

A utilização de uma base modal truncada apresenta como grande vantagem uma redução muito significativa do esforço computacional particular na determinação dos modos naturais de vibração.
Uma base modal truncada deverá incluir os modos que mais contribuem para a resposta do sistema perante uma solicitação aplicada que são, em geral, os modos de menor energia ou de mais baixa frequência e, em particular, os mais próximos da banda de frequências de excitação.

- Em que condições os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o regime forçado do sistema amortecido? Demonstrar.

$[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ → Condição Caughey.

Na base modal: $[\Phi]^T[C][\Phi] = \alpha \underbrace{[\Phi]^T[M][\Phi]}_{[I]} + \beta \underbrace{[\Phi]^T[K][\Phi]}_{[\Omega^2]}$

$= \alpha[I] + \beta[\Omega^2]$

$= [\alpha + \beta\Omega^2]$

$= [2\xi\Omega]$ → ~~É uma matriz diagonal~~

Os vectores modais podem ser utilizados quando os vectores modais do sistema não amortecido diagonalizam igualmente a matriz de amortecimento viscoso proporcional, e as equações de movimento na base modal são equações independentes. Têm que verificar a condição de Caughey.

- Indicar os pressupostos dos métodos de integração directa das eqs. dif. do movimento. Caracterizar o método das diferenças finitas como método de integração directa.

Os pressupostos são:

- Verificação da equação diferencial apenas em instantes discretos T_i, separados por intervalos de tempo Δt, e não para todo o valor da variável t;
- estabelecimento de determinado tipo de variação do deslocamento $x(t)$, da velocidade $\dot{x}(t)$ ou da aceleração $\ddot{x}(t)$ dentro de cada intervalo de tempo Δt.

O procedimento consiste pois em dividir o tempo T de resposta em n intervalos regulares, $\Delta t = \frac{I}{n}$ e determinar a solução nos instantes discretos t_i; $i = 1, \ldots, n$.

- O método das diferenças finitas baseia-se na aproximação da velocidade e da aceleração, respectivamente as derivadas $\dot{x}_i$ e $\ddot{x}_i$ do deslocamento em termos dos valores discretos do deslocamento x_i, de modo que a eq. dif. conduz a uma equação algébrica.

A eq. dif. mov. axial forçado de uma barra (tracção - compressão) escreve-se como $\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = f(t)$ e as formas naturais de vibração são representadas pelas funções características $U_r(x)$, $r=1,\ldots$

- Escrever as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das formas naturais $U_n(x)$, $n=1,\ldots,\infty$.

As formas naturais de vibração apresentam propriedades de ortogonalidade relativamente à massa e à rigidez.

Se adoptarmos o critério de normalização das formas naturais para massas modais unitárias, as propriedades de ortogonalidade designam-se por ortonormalidade e exprimem-se da seguinte forma:

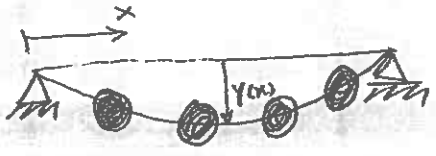
$$\int_0^l \rho A(x)\, U_n(x)\, U_s(x)\, dx = \delta_{rs}$$

$$\int_0^l \frac{dU_s(x)}{dx} EA \frac{dU_n(x)}{dx} = \omega_r^2 \delta_{rs}$$

→ A figura representa a deformada estática $y(x)$ de uma viga simplesmente aposada sob a acção do peso próprio de uma série de massas concentradas m_i, $i=1,\ldots,n$ colocadas ao longo do comprimento l da viga.

Admitindo a deformada estática como função de aproximação para a forma fundamental de vibração de flexão da viga, desprezando a massa da viga e utilizando o quociente de Rayleigh, determinar a estimativa da freq. fundamental. Demonstrar que:

$$\omega = \left(\frac{g \sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad R(\Phi(x)) = \omega^2 = \frac{V_{máx}}{T^*}$$



Para a flexão:

$$\begin{cases} V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right)^2 dx + V_{cfn} \\ T^* = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A(x) (V(x))^2 dx + T_{cfn} \end{cases}$$

cf. $x=0 \Rightarrow V(x)=0$

$x=l \Rightarrow EI \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = 0$

$V(x) = Y$ $\qquad \frac{1}{2} m (V(x))^2 = \frac{1}{2} m_i y_i^2$

Massa da viga desprezável, logo $T^* = T_{cfn}$

$$= \frac{1}{2} m_i (V(x_i))^2$$

$$= \frac{1}{2} m_i y_i^2$$

Atuação peso próprio das massas provoca deformação

$$V = \frac{1}{2} F_i y_i$$

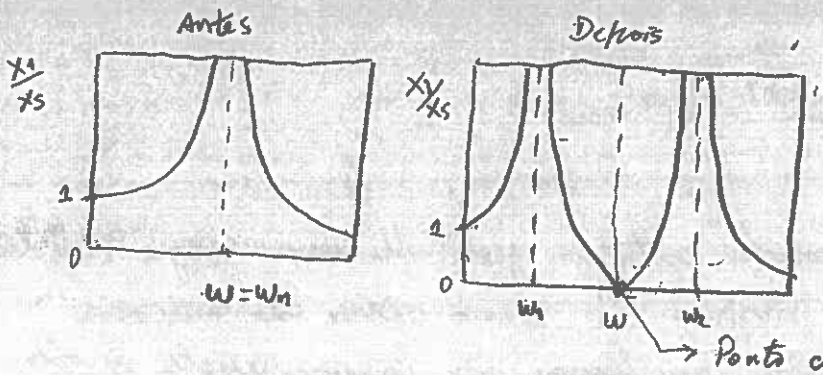
$$= \frac{1}{2} g m_i y_i$$

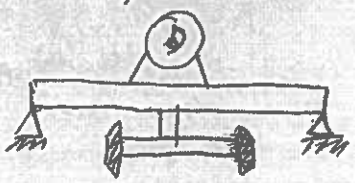
$$w^2 = \frac{V_{max}}{T^*} = \frac{\frac{1}{2} g m_i y_i}{\frac{1}{2} m_i y_i^2}$$, para 1 elemento

n elementos → $w^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} g m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2}$ ⇔ $w = \left(g \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2} \right)^{1/2}$

→ A figura representa um sistema vibratório ao qual foi acoplado um absorsor de vibração sintonizado para a freq. de excitação.

- Representar graficamente a amplitude de resposta do sistema principal antes e depois da montagem indicando claramente pontos notáveis.

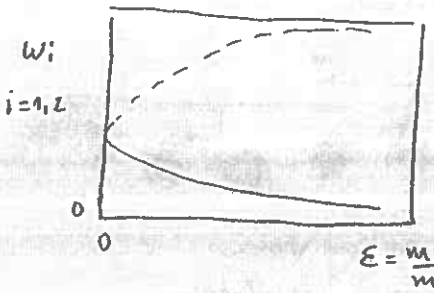




→ Ponto de funcionamento do sistema

- Quanto mais afastado tiver w_1 e w_2 de w, menor é a flutuação de w no caso desta variar.

- Referir as implicações da razão de massas no funcionamento do sistema e/ou na eficiência da solução.



→ Aumentando a razão entre massas, aumenta a banda de frequências de funcionamento.

O aumento da razão de massas conduz a 1 afastamento das equências naturais w_1 e w_2 do sistema tornando viável a xcitação do sistema para uma banda de frequências mais alargada solução torna-se mais eficiente p/ valores próximos da frequência le sintonização.

Demonstre que os modos naturais de sistemas discretos com n graus de liberdade são, em geral, ortogonais em relação às matrizes de massa e rigidez.

$$[K]\{\phi\}_r = \omega^2 [m]\{\phi\}_r$$

$$\begin{cases} [K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 [m]\{\phi\}_r \\ [K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 [m]\{\phi\}_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_r^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r \quad (1) \\ \{\phi\}_r^T [K]\{\phi\}_s = \omega_s^2 \{\phi\}_r^T [m]\{\phi\}_s \quad (2) \end{cases}$$

Transpondo a eq. 2) e subtraindo à eq. 1, temos:

$$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = \omega_s^2 \{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r$$

$$[m] = [m]^T$$

$$[K] = [K]^T$$

$$[K]\{\phi\} = \omega^2 [m]\{\phi\}$$

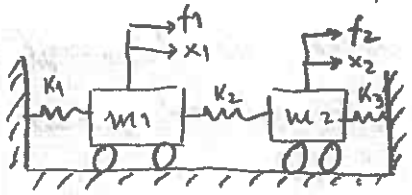
$$0 = (\omega_s^2 - \omega_r^2)\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r$$

$$\downarrow$$

$\{\phi\}_s^T [m]\{\phi\}_r = 0 \rightarrow$ Ortogonalidade em relação à massa.

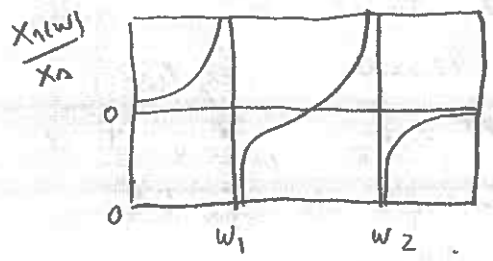
$\{\phi\}_s^T [K]\{\phi\}_r = 0 \rightarrow$ Ortogonalidade em relação à rigidez.

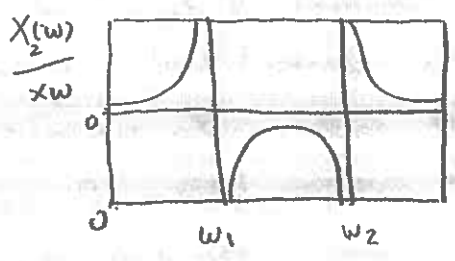
→ Suponha que as forças aplicadas ao sistema representado são $f_1(t) = F\cos$ e $f_2 = 0$ e que ω varia. Quais as amplitudes máximas do mov. das massas do sistema e a que freq. ocorrem? Qual é a amplitud mínima, em módulo, de vibração da massa 1?



$f_1(t) = F_1 \cos \omega t$, ω varia

$f_2(t) = 0$



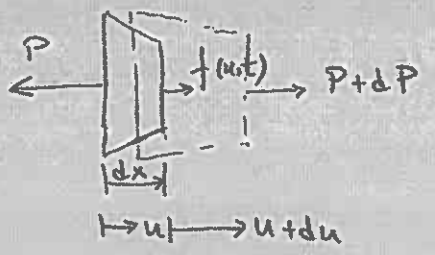


- $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$ tendem p infinito
- $\omega = \omega_1$ e $\omega = \omega_2 \rightarrow$ Condições ressonância

- $0 < \omega < \omega_1 \rightarrow m_1$ e m_2 movem-se em fase
- $\omega > \omega_2 \rightarrow m_1$ e m_2 movem-se em oposição de fase
- $\omega_1 < \omega < \omega_2 \rightarrow m_1$ e m_2 movem-se em fase ou oposição de fase.

→ Existe um valor particular da freq. de excitação ω para a qual $X_1(\omega)$ a massa 1, à qual está aplicada a força excitadora $f_1(t)$, se anula.

→ Deduza a eq. do mov. que representa as vibrações longitudinais de uma barra de secção (~~constante~~) recta com área $A(x)$, com módulo de elasticidade longitudinal E, massa volúmica ρ e sujeita a uma força por unidade de comprimento $f(x,t)$, segundo x.



Aplicando 2ª Lei de Newton

$$F = \dot{Q}$$

$$(P(x,t) + dP(x,t)) - P(x,t) + f(x,t) = \rho A(x)\,dx\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$dP(x,t) + f(x,t) = \rho A(x)\,dx\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$P(x,t) = E A(x)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$dP(x,t) = \frac{\partial P(x,t)}{\partial x}\,dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(E A(x)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)dx \quad (*)$$

Introduzindo (*) na equação e dividindo tudo por dx, temos:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(E A(x)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = \rho A(x)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}}$$

→ A análise do comportamento dinâmico de um sistema discreto pode assentar no modelo espacial do sistema.

- Indicar a(s) principal(s) vantagem(s) das equações de Lagrange no estabelecimento do modelo espacial. Como é considerado, normalmente, o mecanismo de amortecimento de tipo viscoso nas eqs. Lagrange

As equações de Lagrange exprimem o equilíbrio dinâmico de um sistema em termos de coordenadas generalizadas (desloc. lineares ou angulares), da energia cinética total do sistema, da variação da energia potencial do sistema relativamente à energia potencial na posição de equilíbrio estático, e do trabalho das forças não conservativas.

A principal vantagem é o estabelecimento das n eqs dif. do mov. do sistema, sem ter a necessidade de recorrer à construção de diagrama de corpo livre das massas presentes no sistema e evita também a aplicação da 2ª lei de Newton do movimento a cada massa.

O mecanismo de amortecimento do tipo viscoso nas eqs de Lagrange é considerado pela derivada da função de dissipação de Rayleigh em ordem às coordenadas generalizadas. Para o amortecimento viscoso, as forças de amortecimento são proporcionais às velocidades generalizadas.

$$F = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} C_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s \qquad -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

- Indicar que tipo de acoplamento pode apresentar o modelo espac e qual a sua origem.

O acoplamento pode ser do tipo:

- acoplamento de inércia (matriz massas)
- " " elástico ou de rigidez (matriz rigidez)
- " " de amortecimento (matriz amort.)

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

A natureza da ligação ou acoplamento entre as eqs. dif. do mov. depende apenas da escolha das coordenadas generalizadas, isto é, da forma como se descreve o movimento do sistema.

- Escrever, em notação matricial, as expressões da energia cinética e da energia potencial elástica.

Caracterizar, justificando, estas duas formas de energia.

$$V_i = \frac{1}{2} f_i x_i \Rightarrow V = \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad f_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_j$$

$$V = \frac{1}{2}\{x\}^T[K]\{x\}$$ → É uma função quadrática dos deslocamentos

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \Rightarrow T = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T[m]\{\dot{x}\}$$ → É uma função quadrática das velocidades

→ A energia cinética não pode ser negativa e apenas é nula quando todas as velocidades forem nulas, classificando assim a energia cinética como uma forma quadrática definida positiva.

→ A energia potencial é, em geral, uma forma quadrática definida positiva. No entanto, há sistemas para os quais a energia potencial é nula sem todos os deslocamentos o sejam (sistemas [illegible])

[illegible] a energia potencial é uma função quadrática semi-def[illegible] positiva em vez de definida positiva.

→ Estabelecer uma comparação entre a equação característica (cujas soluções são as frequências e as formas naturais de vibração) de um sistema discreto e de um sistema contínuo.

Num sistema discreto a equação característica é obtida calculando o determinante do problema característico dado por $\Delta(\omega) = |[K] - \omega^2[m]| = 0$.
As raízes ω_i^2, $i = 1, \dots, n$, valores particulares de ω^2 para os quais o sistema homogéneo admite soluções não nulas para o vector $\{u\}$, designam-se por valores característicos e representam as frequências naturais de vibração do sistema.

No caso de um sistema contínuo a eq. característica é $-\mathcal{L}[K(x)\mathcal{L}(V(x))] = \omega^2 [illegible]$
Assim, esta equação tem de ser verificada no domínio $0 < x < l$ e as soluções $(\omega_n^2, V_n(x))$ ou funções características $V_n(x)$ representativas das formas naturais de vibração têm de verificar as condições de fronteira do problema.

→ Escrever as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das formas naturais de vibração de uma viga à flexão.

As formas naturais de vibração de uma viga à flexão apresenta propriedades de ortogonalidade em relação à massa e à rigidez.
Adoptando o critério de normalização das formas naturais para massas modais unitárias, as propriedades de ortogonalidade passam a designar-se por ortonormalidade e exprimem-se da seguinte forma:

$$\int_0^l \rho A(x) V_r(x) V_s(x)\, dx = \delta_{rs} \quad \text{(massa)}$$

$$\int_0^l \frac{d^2 V(x)}{dx^2} EI(x) \frac{d^2 V_s(x)}{dx^2}\, dx = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad \text{(rigidez)}$$

Sistemas com n graus de liberdade

- Sugira uma transformação de coordenadas para desacoplar as eqs do movimento de um sistema discreto com n gdl, não amortecido e sob a acção de forças exteriores -

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

Transformação de coordenadas projectando o sistema de equações na base modal usando matriz transf. de vectores modais normalizados.

$$\{x(t)\} = [T]\{\eta(t)\}$$

↳ representa a matriz de transformação de coordenadas generalizadas $\{x(t)\}$ para coordenadas generalizadas $\{\eta(t)\}$.

Adoptando $[T] = [\Phi] \rightarrow \{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\}$

$$\{\ddot{x}(t)\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\}$$

Substituindo na eq. dif. anter:

$$[m][\Phi]\{\ddot{\eta}(t)\} + [K][\Phi]\{\eta(t)\} = \{f(t)\}$$

$$\underbrace{[\Phi]^T[m][\Phi]}_{[I]}\{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{[\Phi]^T[K][\Phi]}_{[\Omega^2]}\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\}$$

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\eta}_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_n^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1(t) = \phi_{11}f_1(t) + \cdots + \phi_{n1}f_n(t) \\ \vdots \\ N_n(t) = \phi_{1n}f_1(t) + \cdots + \phi_{nn}f_n(t) \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = N_i(t) \qquad i = 1, \ldots, n$$

→ Sistema com n graus de liberdade, amortecido governado pelo sist. de eqs dif. $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}$ e $\{\dot{x}(t=0)\}$.

- Caracterizar as matrizes de massa e rigidez.

Num sistema com n graus de liberdade, as eqs dif. apresentam-se acopladas, i.e. constituem um sistema de n eqs dif. devido ao facto do movimento da massa i influenciar o movimento das massas j e vice-versa.

As matrizes de massa [m] e rigidez [K] são simétricas e na forma mais geral apresentam a seguinte tipologia:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

↳ No caso particular de um sistema de massas concentradas, de um sistema discreto com n graus de liberdade, não existe acoplamento dinâ

- Caracterizar as eqs do movimento na base modal ou natural.

A transformação linear com a matriz modal $[\Phi]$, conjuntamente com a propriedade de ortogonalidade dos vectores modais, permite, pois, o desacoplamento simultâneo em termos elásticos e de inércia das n eqs do mov. A projecção do sistema de eqs dif. mov na base modal conduz a eqs dif. desacopladas ou independentes, sendo cada uma delas idêntica à eq. dif. do mov. do sistema com um grau de liberdade.

$$\ddot{M}_i(t) + 2\xi_i w_i \dot{y}(t) + w_i^2 y(t) = N_i(t) \qquad i = 1, \dots, n.$$

↳ a matriz não se encontra necessariamente desacoplada em termos de amortecimentos.

- Mostrar como a resposta $\{x(t)\}$ do sistema é dada pela combinação linear (sobreposição) dos modos naturais de vibração.

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{y(t)\}$$

Para um sistema com n graus de liberdade:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_i(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & & \\ \phi_{i1} & \cdots & \phi_{in} \\ \vdots & & \\ \phi_{n1} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_i(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \phi_{11} y_1(t) + \cdots + \phi_{1n} y_n(t) \\ \phi_{i1} y_i(t) + \cdots + \phi_{in} y_n(t) \\ \phi_{n1} y_1(t) + \cdots + \phi_{nn} y_n(t) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{i1} \\ \vdots \\ \phi_{ni} \end{Bmatrix} y_1(t) + \cdots + \begin{Bmatrix} \phi_{1n} \\ \vdots \\ \phi_{in} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{Bmatrix} y_n(t) \qquad \Rightarrow \{x(t)\} = \sum_{i=1}^{n} \{\phi\}_i \, y_i(t)$$

forma modal ↑ coordenada modal ↑

↳ sobreposição das formas naturais de vibração multiplicadas pelas respe coordenadas modais.

Com base nas freq. ω_1 e ω_2 e nos amortecimentos ξ_1 e ξ_2 de um sistema com 2 graus de liberdade, estabelecer 2 eqs que permitam determinar os parâmetros α e β de uma matriz de amortecimento proporcional, $[C] = \alpha[m] + \beta[K]$. Referir o interesse de uma matriz de amortecimento proporcional.

$$[C] = \alpha[m] + \beta[K]$$

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = \alpha \underbrace{[\Phi]^T[m][\Phi]}_{[I]} + \beta \underbrace{[\Phi]^T[K][\Phi]}_{[\Omega^2]}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

Ortogonalidade dos vectores modais

$$= \alpha[I] + \beta[\Omega^2]$$

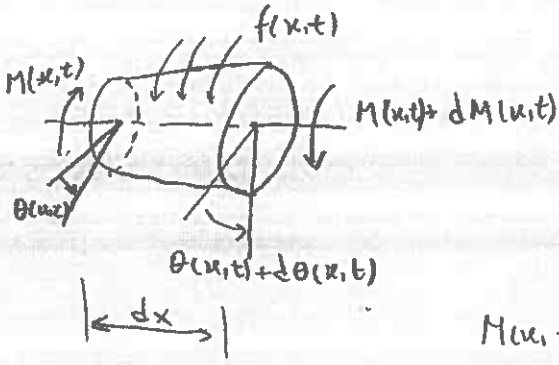
$$= \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= [\alpha + \beta\Omega^2]$$

$$= [2\xi\Omega]$$

→ Veio de comprimento l em vibração de torção descrita pelo campo de deslocamentos angulares $\theta(x,t)$ que se pode exprimir da forma $\theta(x,t) = \theta(x)\, g(t)$.

- Considerar um elemento infinitesimal de veio e aplicar a 2ª lei de Newton, estabelecer a equilíbrio dinâmico.



$M = K$

$$(M(x,t) + dM(x,t)) - M(x,t) + f(x,t)\,dx = J(x)\,dx\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

$$dM(x,t) + f(x,t)\,dx = J(x)\,dx\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

$$M(x,t) = G\,I_p(x)\cdot\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}$$

$$dM(x,t) = \frac{dM(x,t)}{dx}\,dx = \frac{d}{dx}\left(G\,I_p(x)\,\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)dx$$

$$\frac{d}{dx}\left(G\,I_p(x)\,\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right)dx + f(x,t)\,dx = J(x)\,dx\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(G\,I_p(x)\,\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t) = J(x)\,\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}$$

Explicar o significado físico da solução $\theta(x,t)$ expressa na forma

$\theta(x,t) = \theta(x)\, g(t)$

↳ indica o tipo de movimento que a configuração espacial do veio executa e depende somente do tempo.

↳ Configuração espacial do veio e só depende de x.

- Escrever as expressões que traduzem as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das funções características $\theta_r(x)$ $r=1,\dots,\infty$ representativas dos formas naturais de vibração.

São ortogonais em relação à matriz de massa e rigidez

$$\int_0^l J(x)\,\theta_r(x)\,\theta_s(x)\,dx = \delta_{rs} \rightarrow \text{massa}$$

$$\int_0^l \frac{d\theta_s(x)}{dx}\, GIp(x)\, \frac{d\theta_r(x)}{dx}\, dx = \omega_r^2\,\delta_{rs} \rightarrow \text{rigidez}$$

↳ Normalizando os vetores modais a propriedade de ortogonalidade designa-se por ortonormalidade.